

Todos los problemas de la Olimpiada se escriben en más de 50 idiomas



Thailandés

วันที่ ๑๒ กรกฎาคม ๒๕๔๙

โจทย์ข้อที่ ๑ ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี I เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบใน จุด P เป็นจุดภายในรูปสามเหลี่ยมที่สอดคล้อง

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

จงแสดงว่า $AP \geq AI$ และแสดงการเป็นสมการที่ต่อเมื่อ $P = I$

โจทย์ข้อที่ ๒ ให้ P เป็นรูป 2006 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า จะเรียกเส้นเชื่อมของ P ว่าด้านดี เมื่อจุดปลายทั้งสองของเส้นเชื่อมมุมหนึ่งเป็นจุดยอดของ P ออกเป็นสองส่วน ซึ่งแต่ละส่วนประกอบด้วยด้านจำนวนคี่ด้าน นอกจากนี้ ให้ถือว่าด้านแต่ละด้านของ P เป็นด้านดีเช่นกัน จงหาจำนวนที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี ด้านดี สองด้าน ซึ่งเกิดขึ้นจากการเชื่อมมุม P เป็นรูปสามเหลี่ยมย่อยด้วยเส้นเชื่อมมุม 2003 เส้น โดยไม่มีเส้นเชื่อมมุมใดเส้นใดตัดกันภายใน P

โจทย์ข้อที่ ๓ จงหาจำนวนจริง M ค่าน้อยสุดที่ทำให้สมการ

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนจริง a, b และ c

42th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD SLOVENIA 2006



language: Spanish

12 de julio de 2006

Problema 1. Sea ABC un triángulo y sea I el centro de su circunferencia inscrita. Sea P un punto en el interior del triángulo tal que

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Demuestre que $AP \geq AI$ y que vale la igualdad si y sólo si $P = I$.

Problema 2. Decimos que una diagonal de un polígono regular P de 2006 lados es un segmento bueno si sus extremos dividen al borde de P en dos partes, cada una de ellas formada por un número impar de lados. Los lados de P también se consideran segmentos buenos.

Supongamos que P se ha dividido en triángulos trazando 2003 diagonales de modo que ninguna par de ellas se corta en el interior de P . Encuentre el máximo número de triángulos buenos que puede haber tales que dos de sus lados son segmentos buenos.

Problema 3. Determine el menor número real M tal que la desigualdad

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

se cumple para todos los números reales a, b, c .

Hebreo

2006 ביולי 12

שאלה מספר 1. יהי משולש שסרכו המעגל החוסם שלו הוא P ונקודה P הנמצאת בתוך המשולש מקיימת את השוויון

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$

הוכח כי $AP \geq AI$ וכי שוויון מקיים אם ורק אם $P = I$.

שאלה מספר 2. נניח כי משולש P מוקדם בשנת 2006 צלעות. אלמנט P נקרא טוב אם שני קצותיו מחלקים את הקרע של P לשני חלקים, שכל אחד מהם מורכב מספר אי-זוגי של צלעות של P . הצלעות של המשולש P נקראות גם כן טובות.

נניח כי המשולש P חולק למשולשים על ידי הנחת 2003 אלמנטים, כך שאין בהם שני אלמנטים בעלי נקודה שיתחם הנמצאת בתוך המשולש P . מצא את המספר הגדול ביותר של משולשים שישו מקיים, שיש להם שתי צלעות טובות, אשר יכולים להחלקל בהצורה זאת.

שאלה מספר 3. מצא את המספר המינימלי M הקטן ביותר, כך שאם השוויון

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

מקיים עבור כל שלושה מספרים ממשיים a, b, c

Serbio

12. јулн 2006.

Zadatak 1. Neka je I sredniste upisane kruznice trougla ABC . U unutrašnjosti trougla izabrana je tacka P takva da je

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Докажите да је $AP \geq AI$, при чему се једнакост достигае ако и само ако се P поклапа са I .

Zadatak 2. За националу правилног 2006-угла P кажемо да је добро, ако неки крајеви деле руб од P на два дела тако да је сваки од њих састављен од непарног броја страница од P . За странице полигона P такође кажемо да су добре.

Посматрајмо разбијања полигона P на троуглове помоћу 2003 дијагонале, такве да никоје две међу њима немају заједничку тачку у унутрашњости полигона P . Одредите максималан број једнакокраких троуглова са две добре странице, који се могу појавити при неком таквом разбијању.

Zadatak 3. Одредите најмањи реални број M таква да неједнакост

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

важи за све реалне бројеве a, b и c .

Griego

12 Ιουλίου 2006

Πρόβλημα 1. Δίνεται τρίγωνο ABC με κέντρο εγγεγραμμένου κύκλου το σημείο I . Ένα σημείο P στο εσωτερικό του τριγώνου ικανοποιεί την ισότητα

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Να αποδείξετε ότι $AP \geq AI$, και ότι η ισότητα ισχύει τότε και μόνο τότε αν $P = I$.

Πρόβλημα 2. Έστω P ένα κανονικό 2006-γωνο. Μια διαγώνιος του P καλείται καλή αν τα άκρα της διαγώνου το άνω του P σε δύο μέρη, το καθένα από τα οποία αποτελείται από περιττό αριθμό πλευρών του P . Οι πλευρές του P επίσης καλούνται καλές.

Υποθέτουμε ότι το P έχει διαμεριστεί σε τρίγωνα από 2003 διαγώνους, οποιοσδήποτε δύο από τις οποίες δεν έχουν κοινό σημείο στο εσωτερικό του P . Να βρεθεί ο μέγιστος αριθμός των ισοσκελών τριγώνων με δύο καλές πλευρές που μπορούν να εμφανισθούν σε μια τέτοια διαμερίση.

Πρόβλημα 3. Να υπολογισθεί ο ελάχιστος πραγματικός αριθμός M τέτοιος ώστε η ανισότητα

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

να ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς a, b και c .

Chino tradicional

2006年7月12日

Problem 1. 令 I 為三角形 ABC 的內心, 點 P 在三角形的內部, 滿足

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

試證: $AP \geq AI$, 且等號成立的充份必要條件為 $P = I$.

Problem 2. 令 P 為正 2006 邊形, 如果 P 的一條對角線的兩端將 P 的邊界分成兩部分, 每部分皆包含 P 的奇數條邊, 則稱此對角線為“好邊”. 規定 P 的每條邊也是“好邊”.

已知 2003 條在 P 內部不相交的對角線將 P 分割成若干個三角形, 試問在這種分割之下, 最多有多少個有二條“好邊”的等腰三角形.

Problem 3. 試求最小的實數 M , 使得不等式

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

對所有實數 a, b 與 c 都成立.

Cada país participante puede proponer un máximo de seis problemas. El país sede designa un Comité de selección de problemas, que antes del comienzo de la Olimpiada filtra las propuestas recibidas y prepara una lista de aproximadamente treinta problemas, variados en contenidos y en grado de dificultad. El Jurado, integrado por todos los Jefes de Delegación, debe seleccionar **seis problemas**, para ello, trabaja intensamente durante cuatro días, eligiendo los problemas, decidiendo su formulación definitiva, el lugar que ocuparán en la prueba y elaborando las versiones en los más de **cincuenta idiomas** de los participantes. El Jurado intenta que cada día el primer problema sea el más fácil, el segundo de dificultad media, y que el tercero sea realmente difícil. Cada problema se califica con **puntuaciones enteras entre 0 y 7**, de modo que la calificación máxima es de 42 puntos.